Correction du DST n°3 (CB n°1)

16/12/25

Exercice 1

1. Pour tout $x \in [0; +\infty[$, $x + 1 \geq 1 > 0$ donc $\ln(x+1)$ est bien défini et donc $f_1(x)$ est bien définie. De plus, $x \mapsto x+1$ est dérivable et ne s'annule pas sur $[0; +\infty[$, donc par composition $x \mapsto \ln(x+1)$ est dérivable sur $[0; +\infty[$ et enfin par somme $\boxed{f_1 \text{ l'est aussi.}}$

2. Pour tout $x \geq 0$, $f_1'(x) = \dfrac{1}{x+1}$ donc $f_1'(0) = 1$ et $f_1(0) = 1 + \ln(1) = 1$. La tangente à la courbe représentative de $\mathcal{C}_1$ en 0 a pour équation $y = f_1'(0)(x - 0) + f_1(0)$, c'est à dire :

$$\boxed{y = x + 1}$$

3. Pour tout $x \geq 0$, posons $g(x) = f_1(x) - (x+1) = 1 + \ln(x+1) - x - 1$. g est dérivable sur $[0; +\infty[$ comme somme de fonctions qui le sont et :

$$\forall x \geq 0, \quad g'(x) = \frac{1}{x+1} - 1 = \frac{-x}{x+1}$$

donc $g'(x) \leq 0$ pour tout $x \geq 0$. On en déduit que g est décroissante et comme $g(0) = 0$ on a finalement :

$$\forall x \geq 0, \quad g(x) \leq 0$$

d'où :

$$\forall x \geq 0, \quad f_1(x) \leq x + 1$$

c'est à dire que :

$$\boxed{\text{La courbe } \mathcal{C}_1 \text{ est en dessous de } T \text{ sur l'intervalle } [0; +\infty[.}$$

4. Par composition et somme $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f_1(x) = +\infty}$.

   Pour tout $x > 0$ on a :

$$\begin{aligned} \frac{f_1(x)}{x} &= \frac{1}{x} + \frac{\ln(x+1)}{x} \\ &= \frac{1}{x} + \frac{\ln(x)}{x} + \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{x} \end{aligned}$$

   D'après la propriété de croissances comparées, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$, et par quotient, somme et composition : $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(1 + \frac{1}{x}) = \ln(1) = 0$, donc par quotient et sommes de limites :

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \frac{f_1(x)}{x} = 0}$$

5. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \geq 0$ on a $f_p(x) = x \iff g_p(x) = 0$.

   La fonction f_p est dérivable sur $[0; +\infty[$ pour les mêmes raisons que f_1, donc g_p est dérivable sur $[0; +\infty[$ et pour tout $x \geq 0$ on a :

$$g_p'(x) = 1 - \frac{1}{x+p} = \frac{x+p-1}{x+p}$$

Or $p \geq 1$ et $x \geq 0$ donc $x+p>0$ et $x+p-1 \geq 0$ et les deux inégalité sont strictes sur $]0;+\infty[$. On en conclut que g_p est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

g_p est continue (car dérivable) sur $[0;+\infty[$.

$g_p(0) = -f_p(0) = -1$, et en $+\infty$ comme on a : $\forall x \geq 0, \quad g_p(x) = x\left(1 - \frac{f_p(x)}{x}\right)$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f_p(x)}{x} = 0$ (de la même façon que pour $\frac{f_1(x)}{x}$), on en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} g_p(x) = +\infty$.

On a donc $0 \in]g_p(0); \lim\limits_{x\to+\infty} g_p(x)[$. D'après un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g_p(x)=0$ admet donc une unique solution sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

6. On sait que $g_{p+1}(\alpha_{p+1}) = 0$ donc :

$$\alpha_{p+1} - 1 - \ln(\alpha_{p+1}+p+1) = 0$$

Or $g_p(\alpha_{p+1}) = \alpha_{p+1} - f_p(\alpha_{p+1}) = \alpha_{p+1} - 1 - \ln(\alpha_{p+1}+p)$. On a $\alpha_{p+1}+p \leq \alpha_{p+1}+p+1$ donc par croissance de ln :

$$\ln(\alpha_{p+1}+p) \leq \ln(\alpha_{p+1}+p+1)$$

d'où

$$-\ln(\alpha_{p+1}+p \geq -\ln(\alpha_{p+1}+p+1)$$

et donc

$$\alpha_{p+1} - 1 - \ln(\alpha_{p+1}+p) \geq \alpha_{p+1} - 1 - \ln(\alpha_{p+1}+p+1)$$

c'est à dire :

$$\boxed{g_p(\alpha_{p+1}) \geq 0}$$

On en déduit que $g_p(\alpha_{p+1}) \geq 0 = g_p(\alpha_p)$, et comme la fonction g_p est strictement croissante sur $[0;+\infty[$, intervalle contenant α_p et α_{p+1}, on en déduit que $\alpha_{p+1} \geq \alpha_p$, et ce quel que soit l'entier $p \in \mathbb{N}^*$.

$$\boxed{\text{La suite } (\alpha_p)_{p\geq 1} \text{ est donc croissante.}}$$

7. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Par définition de $(\alpha_p)_{p\geq 1}$ on a $f_p(\alpha_p) = \alpha_p$, donc

$$1 + \ln(\alpha_p + p) = \alpha_p$$

et comme $\alpha_p \geq 0$ on a $\alpha_p + p \geq p$ donc $1 + \ln(\alpha_p+p) \geq 1 + \ln(p)$ ce qui donne bien : $\boxed{\alpha_p \geq 1 + \ln(p)}$.

8. Comme $\lim\limits_{p\to+\infty}(1+\ln(p)) = +\infty$ on en déduit par comparaison que $\lim\limits_{p\to+\infty} \alpha_p = +\infty$.

9. (a) $u_3 = g_3(3) = 3-1-\ln(3+3) = 2-\ln(6)$. Comme $6 < \mathrm{e}^2$ d'après l'énoncé on a $\ln(6) < \ln(\mathrm{e}^2) = 2$ donc $2-\ln(6) > 0$, on a donc bien : $\boxed{u_3 \geq 0}$.

   (b) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned} u_{p+1} - u_p &= g_{p+1}(p+1) - g_p(p) \\ &= p+1-1-\ln(2p+2) - (p-1-\ln(2p)) \\ &= 1 - \ln\left(\frac{2p+2}{2p}\right) \\ &= 1 - \ln\left(1+\frac{1}{p}\right) \end{aligned}$$

   Or, pour $p \geq 1$ on a $1 + \frac{1}{p} \leq 2 < \mathrm{e}$ donc $\ln(1+\frac{1}{p}) \leq \ln(e) = 1$ et donc : $u_{p+1} - u_p \geq 0$.

   Ceci étant vrai pour tout entier $p \in \mathbb{N}^*$ on en conclut que $(u_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et donc : $\boxed{\forall p \geq 3, u_p \geq u_3 \geq 0}$.

10. Pour tout entier p supérieur ou égal à 3 on a $g_p(\alpha_p) = 0$ et $g_p(p) \geq 0$. Comme g_p est strictement croissante sur $[0;+\infty[$, intervalle contenant α_p et p, $\boxed{\text{on en déduit que } \alpha_p \leq p.}$

11. Soit $p \geq 3$. Comme $\alpha_p \leq p$ on a $\alpha_p + p \leq 2p$ donc $1 + \ln(\alpha_p + p) \leq 1 + \ln(2p)$. Par définition de α_p on a :

$$\alpha_p = 1 + \ln(\alpha_p + p)$$

donc on a bien :

$$\boxed{\alpha_p \leq 1 + \ln(2p)}$$

12. D'après les questions 7 et 11 on a pour tout $p \geq 3$:

$$1 + \ln(p) \leq \alpha_p \leq 1 + \ln(2p)$$

donc

$$1 + \ln(p) \leq \alpha_p \leq 1 + \ln(2) + \ln(p)$$

et enfin :

$$1 + \frac{\ln(p)}{p} \leq \frac{\alpha_p}{\ln(p)} \leq \frac{1 + \ln(2)}{\ln(p)} + 1$$

Par opérations sur les limites on a $\lim\limits_{p \to +\infty} \left(1 + \frac{\ln p}{p}\right) = \lim\limits_{p \to +\infty} \left(\frac{1 + \ln(2)}{\ln(p)} + 1\right) = 1$ donc par encadrement :

$$\lim_{p \to +\infty} \frac{\alpha_p}{\ln(p)} = 1$$

c'est à dire :

$$\alpha_p \underset{p \to +\infty}{\sim} \ln(p)$$

13. Notons $\mathcal{P}(n)$: v_n existe et $1 \leq v_n \leq 3$.

- **Initialisation :** Comme $v_0 = 1$ donc v_0 existe et $v_0 \in [1, 3]$, $\mathcal{P}(1)$ est donc vraie.
- **Hérédité :** Supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie pour un certain entier naturel non nul n.

  Alors $v_n \geq 1$ donc $v_n + 1 \geq 1$ donc $\ln(v_n + 1)$ est bien définie et $\ln(v_n + 1) \geq \ln(1) = 0$. On en déduit que $f_1(v_n)$ est bien défini et $f_1(v_n) \geq 1$. De plus, $\ln(v_n + 1) \leq \ln(3 + 1) = \ln(4) \leq 2$ donc $1 + \ln(v_n + 1) \leq 3$. On en conclut que v_{n+1} existe et $v_{n+1} \in [1, 3]$.
- **Conclusion :** Par principe de récurrence on en conclut que pour tout $n \in \mathbb{N}$, v_n existe et $v_n \geq 1$

14. Pour tout réel $x \geq 0$ posons $g(x) = x - \ln(1 + x)$. g est dérivable sur $[0, +\infty[$ comme somme et composée de fonctions qui le sont et pour tout $x \geq 0$, $g'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x} \geq 0$ donc g est croissante. Comme $g(0) = -\ln(1) = 0$ on en conclut que : $\forall x \geq 0, g(x) \geq 0$ c'est à dire que :

$$\boxed{\forall x \geq 0, \quad \ln(1 + x) \leq x}$$

15. Soient x et y dans $[1, 3]$ tels que $x < y$. On a :

$$\begin{aligned} \ln(1 + y) - \ln(1 + x) &= \ln\left(\frac{1 + y}{1 + x}\right) \\ &= \ln\left(\frac{1 + x - x + y}{1 + x}\right) \\ &\boxed{= \ln\left(1 + \frac{y - x}{1 + x}\right)} \end{aligned}$$

On en déduit d'après l'inégalité de la question 14 que :

$$\ln(1+y) - \ln(1+x) \leq \frac{y-x}{1+x} \leq \frac{y-x}{2}$$

car pour tout x dans $[1,3]$ on a $x \geq 1$ donc $\dfrac{1}{1+x} \leq \dfrac{1}{2}$. Comme ln est croissante on a $\ln(1+y) - \ln(1+x) \geq 0$ donc tous les termes de l'inégalité précédente sont positifs, et donc :

$$|\ln(1+y) - \ln(1+x)| \leq \frac{1}{2}|y-x|$$

Dans le cas où $y < x$, on a $|\ln(1+y) - \ln(1+x)| = \ln(1+x) - \ln(1+y)$ et il suffit d'inverser le rôle de x et y pour retrouver :

$$\begin{aligned}
|\ln(1+y) - \ln(1+x)| &= \ln(1+x) - \ln(1+y) \\
&\leq \frac{1}{2}(x-y) \\
&\leq \frac{1}{2}|x-y| && \text{car } x-y \geq 0 \\
&\leq \frac{1}{2}|y-x|
\end{aligned}$$

on a donc bien :

$$\boxed{\forall (x,y) \in [1,3]^2, \quad |\ln(1+y) - \ln(1+x)| \leq \frac{1}{2}|y-x|}$$

16. Pour $n = 0$, comme $v_0 = 1$ et $\alpha_1 \in [1,3]$ on a $|v_0 - \alpha_1| \leq 2$, on a donc bien :

$$|v_0 - \alpha_1| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{0-1}$$

Supposons maintenant qu'on ait $|v_n - \alpha_1| \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$ pour un certain entier naturel n. Alors, comme $f_1(\alpha_1) = \alpha_1$ par définition, on a :

$$\begin{aligned}
|v_{n+1} - \alpha_1| &= |f(v_n) - f(\alpha_1)| \\
&= |1 + \ln(v_n + 1) - 1 - \ln(\alpha_1 + 1)| \\
&= |\ln(1+v_n) - \ln(1+\alpha_1)| \\
&\leq \frac{1}{2}|v_n - \alpha_1| && \text{d'après la question précédente et car } v_n \text{ et } \alpha_1 \text{ sont dans } [1,3] \\
&\leq \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} && \text{par hypothèse de récurrence} \\
&\leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n}
\end{aligned}$$

donc par principe de récurrence on en conclut qu'on a bien :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad |v_n - \alpha_1| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}$$

17. On a $|\frac{1}{2}| < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 0$ et donc par encadrement $\lim\limits_{n\to+\infty} |v_n - \alpha_1| = 0$.

Exercice 2

1. Pour tout entier $n \geq 1$, notons $\mathcal{P}(n)$: « u_n existe et $u_n \geq 1$ »

   - **Initialisation :** u_1 existe et $u_1 \geq 1$ par hypothèse donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
   - **Hérédité :** Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour un certain entier n. Alors $u_n \geq 1$ donc $\frac{n}{u_n}$ est bien défini et $\frac{n}{u_n} \geq 0$ donc $u_{n+1} \geq u_n \geq 1$. On a montré que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
   - **Conclusion :** Par principe de récurrence on en conclut que $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n \text{ existe et } u_n \geq 1.}$

2. On remarque que $u_2 = 1 + \frac{1}{1} = 2$, puis $u_3 = 2 + \frac{2}{2} = 3$, pour tout entier $n \geq 1$, si $u_n = n$ alors $u_{n+1} = n + \frac{n}{n} = n + 1$.

   On en conclut par récurrence que : $\boxed{\forall n \geq 1, u_n = n}$.

3. Pour tout entier $n \geq 1$ on a :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{n}{u_n} > 0$$

   donc (u_n) est strictement croissante. D'après une propriété du cours sur les suites croissantes, ou bien elle converge vers un réel, ou bien elle tend vers $+\infty$. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'elle converge vers un réel ℓ. Alors $\ell \geq 1$ par passage à la limite dans l'inégalité : $\forall n \geq 1, \quad u_n \geq 1$.

   D'une part on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$ par propriété.

   D'autre part on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(u_n + \frac{n}{u_n}\right) = +\infty$ par opérations sur les limites.

   Or $\ell \neq +\infty$ ce qui contredit l'unicité de la limite. Contradiction, donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty.}$

4. (a) Pour tout $n \geq 1$ on a :

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= u_{n+1} - n - 1 \\
&= u_n + \frac{n}{u_n} - n - 1 \\
&= \frac{u_n^2 + n - nu_n - u_n}{u_n} \\
&= \frac{(u_n - n)(u_n - 1)}{u_n} \\
&= v_n f(u_n)
\end{aligned}$$

   en posant $f(x) = \frac{x-1}{x}$.

   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 1$ donc $0 \leq u_n - 1 \leq u_n$ et donc $0 \leq \frac{u_n - 1}{u_n} \leq 1$. On en conclut par récurrence immédiate que v_n est positive. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq f(u_n) \leq 1$.

   Comme $v_1 = u_1 - 1 > 0$ on a par récurrence immédiate : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \geq 0$

   De plus, pour tout entier $n \geq 1$, $v_{n+1} - v_n = v_n f(u_n) - v_n = v_n(f(u_n) - 1) \leq 0$ donc (v_n) est décroissante.

$$\boxed{(v_n) \text{ est décroissante et minorée par 0 donc } (v_n) \text{ converge.}}$$

   (c) (v_n) converge vers une limite finie ℓ. Comme pour tout $n \geq 1$, $u_n = v_n + n$ on a $\frac{u_n}{n} = \frac{v_n}{n} + 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{v_n}{n} = 0$ par quotient de limites. On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n} = 1$ c'est à dire que :

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n}$$

Exercice 3

1. Pour tout entier $n \geq 1$, on a

$$\begin{aligned}
a_{n+1} - a_n &= \sum_{k=1}^{2n+3} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} - \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} \\
&= \frac{(-1)^{2n+4}}{(2n+3)^2} + \frac{(-1)^{2n+3}}{(2n+2)^2} \\
&= \frac{1}{(2n+3)^2} - \frac{1}{(2n+2)^2} && \text{car } 2n+4 \text{ est pair et } 2n+3 \text{ impair} \\
&\leq 0 && \text{car } (2n+2)^2 \leq (2n+3)^2 \text{ par croissance de la fonction carrée}
\end{aligned}$$

De même, pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned}
b_{n+1} - b_n &= \sum_{k=1}^{2n+2} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} \\
&= \frac{(-1)^{2n+3}}{(2n+2)^2} + \frac{(-1)^{2n+2}}{(2n+1)^2} \\
&= \frac{1}{(2n+1)^2} - \frac{1}{(2n+2)^2} \\
&\geq 0 && \text{car } (2n+1)^2 \leq (2n+2)^2
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{donc la suite } (a_n) \text{ est décroissante et la suite } (b_n) \text{ est croissante.}}$

De plus, pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned}
a_n - b_n &= \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} \\
&= \frac{(-1)^{2n+2}}{(2n+1)^2} \\
&= \frac{1}{(2n+1)^2} \\
&\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0
\end{aligned}$$

donc (a_n) et (b_n) sont des suites adjacentes.

2. D'après la propriété du cours sur les suites adjacentes, (a_n) et (b_n) convergent vers un même réel ℓ. Puisque $(S_{2n+1})_{n\geq 1}$ et $(S_{2n})_{n\geq 1}$ convergent vers un même réel ℓ, on peut en déduire que la suite (S_n) converge également vers ce réel ℓ selon la propriété du cours sur les suites extraites des termes de rang pair et de rang impair.

Exercice 4

1. Pour tout entier naturel n, on a :

$$\begin{aligned} v_{n+2} &= \ln(u_{n+2}) \\ &= \ln\left(\frac{u_n^2}{u_{n+1}}\right) \\ &= 2\ln(u_n) - \ln(u_{n+1}) \\ &= -v_{n+1} + 2v_n \end{aligned}$$

donc (v_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2.

2. L'équation caractéristique de la suite (v_n) est $r^2 = -r + 2 \iff r^2 + r - 2 = 0$, donc les solutions sont $r = 1$ et $r = -2$. Il existe donc deux réels λ et μ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \lambda + \mu \times (-2)^n$$

Comme $v_0 = \ln(u_0) = \ln(16) = 4\ln(2)$ et $v_1 = \ln(u_1) = \ln(2)$ on a :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \lambda + \mu &=& 4\ln(2) \\ \lambda - 2\mu &=& \ln(2) \end{array} \right. \text{ donc } (L_1 - L_2) \text{ donne } \left\{ \begin{array}{rcl} 3\mu &=& 3\ln(2) \\ \lambda - 2\mu &=& \ln(2) \end{array} \right. \quad \text{donc} \left\{ \begin{array}{rcl} \mu &=& \ln(2) \\ \lambda &=& 3\ln(2) = \ln(8) \end{array} \right.$$

Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \ln(8) + \ln(2) \times (-2)^n$$

et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \mathrm{e}_n^v = \mathrm{e}^{\ln(8)} \times \mathrm{e}^{\ln(2)(-2)^n}$$

donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 8 \times 2^{(-2)^n}}$$

Problème

1. La fonction $x \mapsto x\ln(b)$ est continue, et strictement monotone. Le sens de variation dépend du signe de $\ln(b)$, donc de si $b > 1$ ou $b < 1$.

   Par composition avec la fonction exponentielle qui est continue et strictement croissante, on en déduit que $x \mapsto b^x$ est toujours continue et qu'elle est strictement croissante lorsque $b > 1$ et strictement décroissante lorsque $b < 1$.

2. Si $b > 1$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x\ln(b) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} = -\infty$.

   Si $b < 1$, c'est l'inverse.

   On en déduit que si $b > 1$ on a :
   $$\lim_{x \to +\infty} b^x = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to -\infty} b^x = 0$$
   et que si $b < 1$ on a :
   $$\lim_{x \to +\infty} b^x = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to -\infty} b^x = +\infty$$
   dans tous les cas, tout réel strictement positif y est compris entre $\lim\limits_{x \to -\infty} b^x$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} b^x$, et la fonction $x \mapsto b^x$ est continue et strictement monotone sur $\mathbb{R}$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe un réel x unique tel que $b^x = y$.

3. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $y > 0$:

$$
\begin{aligned}
f_b(x) = y &\Longleftrightarrow \mathrm{e}^{x\ln(b)} = y \\
&\Longleftrightarrow x\ln(b) = \ln(y) && \text{par injectivité de ln} \\
&\Longleftrightarrow x = \frac{\ln(y)}{\ln(b)}
\end{aligned}
$$

donc le nombre $x = \dfrac{\ln y}{\ln b}$ vérifie bien $f_b(x) = y$ (et ce raisonnement montre aussi qu'il est unique).

4. La fonction $x \mapsto \ln(x)$ est continue et strictement croissante sur $]0;+\infty[$, donc la fonction $x \mapsto \dfrac{\ln x}{\ln b}$ l'est aussi, et elle est strictement croissante si $\ln(b) > 0$ c'est à dire si $b > 1$ et strictement décroissante si $b < 1$.
5. Par limite usuelle et produit de limite on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_b(x) = +\infty$ si $b > 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_b(x) = -\infty$ si $b < 1$.
6. Pour tous réels x et y strictement positifs on a :

$$\log_b(xy) = \frac{\ln(xy)}{\ln(b)} = \frac{\ln x + \ln y}{\ln b} = \frac{\ln x}{\ln b} + \frac{\ln y}{\ln b} = \log_b(x) + \log_b(y)$$

$$\log_b\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{\ln(x/y)}{\ln b} = \frac{\ln x - \ln y}{\ln b} = \log_b(x) - \log_b(y)$$

$$\log_b(1/x) = \frac{\ln(1/x)}{\ln b} = \frac{-\ln x}{\ln b} = -\log_b(x)$$

$$\log_b(x^y) = \log_b(\mathrm{e}^{y\ln x}) = \frac{\ln(\mathrm{e}^{y\ln x})}{\ln b} = \frac{y\ln x}{\ln b} = y\log_b(y)$$

7. Pour tout réel x strictement positif :

$$
\begin{aligned}
\log_a(x) + \log_b(x) &= \frac{\ln x}{\ln b} + \frac{\ln x}{\ln a} \\
&= \frac{\ln a \ln x + \ln b \ln x}{\ln(a)\ln(b)} \\
&= \frac{\ln(x)(\ln a + \ln b)}{\ln(a)\ln(b)} \\
&= \frac{\ln(x)\ln(ab)}{\ln(a)\ln(b)}
\end{aligned}
$$

8. (a) $243 = 3 \times 81 = 3 \times 9^2 = 3^5$ donc $\log_3(243) = 5$.
   (b) $\log_2(1/16) = \log_2(2^{-4}) = -4$
   (c) $\log_5(625) = \log_5(5^4) = 4$
   (d) $\log_{\sqrt{\mathrm{e}}}(\mathrm{e}^{-3}) = \log_{\sqrt{\mathrm{e}}}(((\sqrt{\mathrm{e}})^2)^{-3}) = \log_{\sqrt{\mathrm{e}}}((\sqrt{\mathrm{e}})^{-6}) = -6$
9. Pour tout réels strictement positifs a, b et k on a :

$$M_A(ka, kb) = \frac{ka + kb}{2} = k \times \frac{a+b}{2} = kM_A(a,b)$$

et

$$M_G(ka, kb) = \sqrt{kakb} = \sqrt{k^2ab} = k\sqrt{ab} = kM_G(a,b)$$

et si $a \neq b$:

$$M_L(ka, kb) = \frac{kb - ka}{\ln(k) + \ln(b) - \ln(k) - \ln(a)} = k \times \frac{b-a}{\ln b - \ln a} = kM_L(a,b)$$

et si $a = b$, $M_L(ka, kb) = ka = kM_L(a,b)$.

Dans les trois cas on a bien $M(ka, kb) = kM(a,b)$.

10. Pour tous réels strictement positifs a et b on a :

$$\ln(M_G(a,b)) = \ln(\sqrt{ab}) = \frac{1}{2}\ln(ab) = \frac{\ln a + \ln b}{2} = M_A(\ln a, \ln b)$$

11. Pour tous réels x et y strictement positifs, on a : $(x-y)^2 \geq 0$, d'où en développant :

$$x^2 + y^2 - 2xy \geq 0$$

c'est à dire

$$xy \leq \frac{x^2+y^2}{2}$$

On en déduit que pour tous réels strictement positifs a et b, en posant $x = \sqrt{a}$ et $y = \sqrt{b}$ on a d'après l'inégalité précédente :

$$\sqrt{a} \times \sqrt{b} \leq \frac{\sqrt{a}^2 + \sqrt{b}^2}{2}$$

c'est à dire :

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$$

donc on a bien :

$$\boxed{M_G(a,b) \leq M_A(a,b)}$$

12. (a) On pose $g(x) = x - 1 - \ln x$. g est dérivable sur $]0;+\infty[$ et $g'(x) = 1 - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x-1}{x}$ donc g est croissante sur $]0;1[$ et décroissante sur $]1;+\infty[$. Elle atteint donc son maximum en 1 et ce maximum vaut $g(1) = 0$, donc g est négative sur $]0;+\infty[$. On a donc bien :

$$\boxed{\forall x > 0, \quad \ln x \leq x - 1}$$

(b) On a :

$$M_L(a,b) = \frac{b-a}{\ln b - \ln a} = \frac{a(b/a - 1)}{\ln(b/a)}$$

et

$$M_L(a,b) = \frac{b(1-a/b)}{\ln(b/a)} = b\frac{1-\frac{a}{b}}{-\ln(a/b)}$$

(c) Comme $0 < a < b$ on a $\dfrac{b}{a} > 1$ donc $\dfrac{b}{a} - 1 > 0$.

De plus, $\ln(b/a) \leq \dfrac{b}{a} - 1$ d'après la question 12(a), donc, comme $\ln(b/a) > 0$:

$$\frac{b/a - 1}{\ln(b/a)} \geq 1$$

et donc $a \times \dfrac{b/a-1}{\ln(b/a)} \geq a$, donc $a \leq M_L(a,b)$.

De la même façon, $M_L(a,b) = b \times \dfrac{1-a/b}{\ln(b/a)} = b \times \dfrac{1-a/b}{-\ln(a/b)}$ et comme $\ln(a/b) \leq \frac{a}{b} - 1$ on a, comme $\ln(a/b) < 0$:

$$\frac{\frac{a}{b}-1}{\ln(a/b)} \leq 1$$

donc

$$\frac{1-\frac{a}{b}}{-\ln(a/b)} \leq 1$$

et on trouve bien :

$$M_L(a,b) = b \times \frac{1-\frac{a}{b}}{-\ln(a/b)} \leq b$$

donc finalement on a bien :

$$\boxed{a \leq M_L(a,b) \leq b}$$

13. (a) Posons $g(y) = 2y\ln y - y^2 + 1$. g est dérivable sur $[1;+\infty[$ et :

$$\begin{aligned} \forall y > 1, \quad g'(y) &= 2\ln y + 2 - 2y \\ &= 2(\ln y + 1 - y) \end{aligned}$$

Or d'après la question 12.(a) on a $\ln(y) \leq y - 1$ donc $\ln(y) + 1 - y \leq 0$. La fonction g est donc décroissante sur $[1;+\infty[$ et comme $g(1) = 0$ elle est négative sur $[1;+\infty[$.

On a donc

$$\forall y > 1, \quad 2y\ln y - y^2 + 1 \leq 0$$

c'est à dire, comme $\ln(y) > 0$ pour $y > 1$:

$$\boxed{\forall y > 1, \quad y \leq \frac{y^2-1}{2\ln y}}$$

(b) On en déduit que pour tout $x > 1$ en posant $y = \sqrt{x}$ on a $y > 1$ donc d'après la question précédente :

$$\boxed{\sqrt{x} \leq \frac{\sqrt{x}^2 - 1}{2\ln(\sqrt{x})} = \frac{x-1}{\ln x}}$$

(c) En posant $x = \dfrac{b}{a}$ on a donc :

$$\sqrt{\frac{b}{a}} \leq \frac{\frac{b}{a}-1}{\ln(b/a)} = \frac{b/a - 1}{\ln b - \ln a}$$

et en multipliant par a on obtient

$$\boxed{\sqrt{ab} \leq \frac{b-a}{\ln b - \ln a}}$$

(d) On raisonne par équivalence :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}\right)^2 \leq \frac{a+b}{2} &\iff \frac{a+b+2\sqrt{ab}}{4} \leq \frac{a+b}{2} \\ &\iff a+b+2\sqrt{ab} \leq 2a+2b \\ &\iff a+b-2\sqrt{ab} \geq 0 \\ &\iff (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0 \end{aligned}$$

or cette dernière inégalité est toujours vraie donc la première aussi.

(e) Posons comme indiqué $g(y) = \ln(y) - 2\dfrac{y-1}{y+1}$. g est dérivable sur $[1;+\infty[$ et :

$$\begin{aligned}\forall y > 1, \quad g'(y) &= \frac{1}{y} - 2\frac{y+1-(y-1)}{(y+1)^2} \\ &= \frac{(y+1)^2 - 4y}{y(y+1)^2} \\ &= \frac{y^2 - 2y + 1}{y(y+1)^2} \\ &= \frac{(y-1)^2}{y(y+1)^2}\end{aligned}$$

donc $g'(y) \geq 0$ et g est croissante sur $[1;+\infty[$. Comme $g(1) = 0$ on en déduit que g est positive et donc que :

$$\forall y > 1, \quad 2\frac{y-1}{y+1} \leq \ln y$$

En multipliant de chaque côté par $\frac{1}{4}(y+1)^2$ on obtient donc

$$\forall y > 1, \quad \frac{y^2-1}{2} \leq \frac{(y+1)^2}{4} \ln y$$

d'où, comme $\ln(y) > 0$,

$$\boxed{\forall y > 1, \quad \frac{y^2-1}{2\ln y} \leq \left(\frac{y+1}{2}\right)^2}$$

Pour tout réel x strictement supérieur à 1, on a donc, en posant $y = \sqrt{x}$ et d'après l'inégalité précédente :

$$\frac{\sqrt{x}^2 - 1}{2\ln(\sqrt{x})} \leq \left(\frac{\sqrt{x}+1}{2}\right)^2$$

c'est à dire

$$\frac{x-1}{\ln x} \leq \left(\frac{1+\sqrt{x}}{2}\right)^2$$

(f) En posant $x = \dfrac{b}{a}$ on en déduit que :

$$\frac{\frac{b}{a} - 1}{\ln(b/a)} \leq \left(\frac{1+\sqrt{b/a}}{2}\right)^2$$

puis en multipliant par $a = (\sqrt{a})^2 > 0$ de chaque côté :

$$\frac{b-a}{\ln b - \ln a} \leq a \times \left(\frac{1+\sqrt{b/a}}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}\right)^2$$

On a donc bien $M_L(a,b) \leq \left(\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}\right)^2 \leq \dfrac{a+b}{2}$ d'après la question 13.(d), d'où le résultat voulu. En conclusion on a bien

$$\boxed{M_G(a,b) \leq M_L(a,b) \leq M_A(a,b)}$$

14. D'après la définition de S_p on a :

$$S_2(a,b) = \left(\frac{b^2 - a^2}{2(b-a)}\right)^1 = \frac{a+b}{2}$$

et

$$\begin{aligned}
S_{-1}(a,b) &= \left(\frac{b^{-1} - a^{-1}}{a-b}\right)^{-1/2} \\
&= \sqrt{\frac{a-b}{1/b - 1/a}} \\
&= \sqrt{\frac{a-b}{\frac{a-b}{ab}}} \\
&= \sqrt{ab}
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{donc on a bien } S_2(a,b) = M_A(a,b) \text{ et } S_{-1}(a,b) = M_G(a,b)}$

15. Soit p un réel différent de 0 et de 1 et a et b deux réels strictement positifs distincts.

$$\begin{aligned}
S_p(a,b) &= \left(\frac{b^p - a^p}{p(b-a)}\right)^{1/(p-1)} \\
&= \left(\frac{a^p((b/a)^p - 1)}{p(b-a)}\right)^{1/(p-1)} \\
&= \left(\frac{a^p}{b-a}\right)^{1/(p-1)} \times \left(\frac{(b/a)^p - 1}{p}\right)^{1/(p-1)}
\end{aligned}$$

16. En posant $f(x) = \left(\frac{b}{a}\right)^x = \mathrm{e}^{x\ln(b/a)}$ on a f dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \ln(b/a)\,\mathrm{e}^{x\ln(b/a)}$. En particulier, f est dérivable en 0 et $f'(0) = \ln\left(\frac{b}{a}\right)$. On en déduit la limite suivante, par définition :

$$\boxed{\lim_{p\to 0} \frac{f(p) - f(0)}{p - 0} = \ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

17. Pour tout réel p différent de 0 et 1, on a

$$\left(\frac{(b/a)^p - 1}{p}\right)^{1/(p-1)} = \exp\left(\frac{1}{p-1}\ln\left(\frac{(b/a)^p - 1}{p}\right)\right)$$

et par produit et composition de limites lorsque p tend vers 0 on a :

$$\lim_{p\to 0}\left(\frac{(b/a)^p - 1}{p}\right)^{1/(p-1)} = \exp(-\ln(\ln(b/a))) = \frac{1}{\ln(b/a)} = \frac{1}{\ln(b) - \ln(a)}$$

d'autre part, on a

$$\left(\frac{a^p}{b-a}\right)^{1/(p-1)} = \exp\left(\frac{1}{p-1}\ln\left(\frac{\mathrm{e}^{p\ln a}}{b-a}\right)\right)$$

donc par opérations et composition de limites, lorsque p tend vers 0 on a :

$$\lim_{p\to 0}\left(\frac{a^p}{b-a}\right)^{1/(p-1)} = \exp\left(-\ln(1/(b-a))\right) = \exp(\ln(b-a)) = b - a$$

donc finalement par produit de limites on a bien :

$$\boxed{\lim_{p \to 0} S_p(a,b) = (b-a) \times \frac{1}{\ln b - \ln a} = \frac{b-a}{\ln b - \ln a} = M_L(a,b)}$$